Seconda prova scritta M.R. 2013-14

Si consideri un riferimento inerziale, di origine O, assi ortonormali e coordinate (x, y, z). L'asse delle z è diretto lungo la verticale ascendente. Il punto centrale C di un'asta pesante omogenea AB di lunghezza $2R$ e massa m è libero di muoversi lungo l'asse delle z, mentre l'asta è vincolata a rimanere perpendicolare al detto asse.

Un punto materiale P di eguale massa m è libero di muoversi lungo l'asse z, sotto l'azione di una molla di costante elastica k che lo richiama verso il centro O. Tra il punto P e l'estremo B della sbarra si esercita una interazione di energia potenziale U:

$$U = kR|BP| \tag{0.1}$$

Si denoti con θ l'angolo formato dalla proiezione dell'asta orientata AB sul piano $z = 0$ con l'asse delle x. Si ponga $\lambda = \frac{mg}{kR}$.

- Scrivere la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane θ, z_1 (quota del punto C), z_2 (quota del punto P) e si dimostri che tale lagrangiana si separa nella somma di due lagrangiane indipendenti:

$$\mathcal{L}(\theta, z_1, z_2, \dot{\theta}, \dot{z}_1, \dot{z}_2) = \mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{L}_2(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) \tag{0.2}$$

- Studiare il sistema lagrangiano di lagrangiana $\mathcal{L}_1$ determinandone la soluzione generale.

- Determinare quale condizione deve soddisfare λ affinché esistano soluzioni stazionarie per $\mathcal{L}_2$.

- Studiare la stabilità di tali soluzioni.

- Come si muove l'asta in corrispondenza alle soluzioni stazionarie di $\mathcal{L}_2$?

- Considerare il sistema di Lagrange per la lagrangiana $\mathcal{L}_2$ quando si sostituisca (0.1) con

$$U = \frac{k}{2}|BP|^2 \tag{0.3}$$

  Si dimostri che la soluzione generale è sovrapposizione di una soluzione stazionaria e di due moti oscillatori, determinandone le relative frequenze.

Svolgimento

Il punto A ha coordinate $(R\cos\theta, R\sin\theta, z_1)$ il punto B ha coordinate $(-R\cos\theta, -R\sin\theta, z_1)$, infine il punto P ha coordinate $(0,0,z_2)$. Si ha quindi:

$$|BP| = \sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{0.4}$$

L'energia potenziale U del sistema è quindi:

$$U(z_1, z_2) = kR\sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2} + gm(z_1 + z_2) + \frac{k}{2}z_2^2 \tag{0.5}$$

La lagrangiana del sistema è quindi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta, z_1, z_2, \dot{\theta}, \dot{z}_1, \dot{z}_2) &= \mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{L}_2(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) \\
\mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 \\
\mathcal{L}_2(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) &= \frac{m}{2}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) - kR\sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2} - gm(z_1 + z_2) - \frac{k}{2}z_2^2
\end{aligned} \tag{0.6}$$

Il sistema di Lagrange relativo alla lagrangiana $\mathcal{L}_1$ ha come soluzione generale:

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \tag{0.7}$$

Passiamo al sistema di Lagrange associato alla lagrangiana $\mathcal{L}_2$. Studiamo i punti stazionari di U. Si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial z_1} &= kR\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2}} + mg \\
\frac{\partial U}{\partial z_2} &= -kR\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2}} + mg + kz_2
\end{aligned} \tag{0.8}$$

dunque i punti critici sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned}
kR(z_1 - z_2) &= -mg\sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2} \\
kR(z_1 - z_2) &= (mg + kz_2) + \sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2}
\end{aligned} \tag{0.9}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
kR(z_1 - z_2) &= -mg\sqrt{R^2 + (z_1 - z_2)^2} \\
2mg + z_2 &= 0
\end{aligned} \tag{0.10}$$

e quindi necessariamente le eventuali soluzioni debbono soddisfare $z_1 < z_2$. Si ha:

$$z_2 = -\frac{2mg}{k} = -2R\lambda \tag{0.11}$$

ed eliminando la radice nella prima delle (0.10):

$$(z_1 - z_2)^2(1-\lambda^2) = \lambda^2 R^2 \tag{0.12}$$

Dunque le soluzioni esistono solo se $\lambda \in (0,1)$ e sono:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\lambda R(2 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \\ z_2 &= -2R\lambda \end{aligned} \tag{0.13}$$

La matrice hessiana di U è:

$$H(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} \frac{k}{[1+(\frac{z_1-z_2}{R})^2]^{\frac{3}{2}}} & -\frac{k}{[1+(\frac{z_1-z_2}{R})^2]^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{k}{[1+(\frac{z_1-z_2}{R})^2]^{\frac{3}{2}}} & \frac{k}{[1+(\frac{z_1-z_2}{R})^2]^{\frac{3}{2}}} + k \end{pmatrix} \tag{0.14}$$

quindi è una matrice con determinante e traccia positivi. Ne consegue che la soluzione di equilibrio $(2R\lambda,,,0,0)$ del sistema di Lagrange corrispondente a $\mathcal{L}_2$ è stabile. A questa soluzione corrisponde la soluzione del sistema di Lagrange di lagrangiana $\mathcal{L}$ che descrive l'asta che ruota attorno l'asse z con velocià angolare costante $\dot{\theta}_0$, mantenendo la quota $z_1 = -R\lambda(2 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}})$, mentre il punto P è fermo sull'asse z alla quota $z_2 = -2R\lambda$.

Si considera ora il problema con lagrangiana $\mathcal{L}_2$ assegnata da:

$$\mathcal{L}_2(z_1,z_2,\dot{z}_1,\dot{z}_2) \quad = \quad \frac{m}{2}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) - \frac{k}{2}[R^2 + (z_1-z_2)^2] - gm(z_1+z_2) - \frac{k}{2}z_2^2 \tag{0.15}$$

Le equazioni di moto per $\mathcal{L}_2$ sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_1 &= -k(z_1-z_2) - gm \\ m\ddot{z}_2 &= k(z_1-z_2) - gm - kz_2 \end{aligned} \tag{0.16}$$

Si ha la soluzione particolare data da:

$$\begin{aligned} \overline{z}_1 &= -\frac{3gm}{k} \\ \overline{z}_2 &= -2\frac{gm}{k} \end{aligned} \tag{0.17}$$

Consideriamo l'equazione omogenea l'omogenea associata:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -\frac{k}{m}(z_1-z_2) \\ \ddot{z}_2 &= \frac{k}{m}(z_1-z_2) - \frac{k}{m}z_2 \end{aligned} \tag{0.18}$$

Si ha l'equazione per le le frequenze l'equazione

$$\det\begin{pmatrix} m\mu^2 k & -k \\ -k & m\mu^2 + 2k \end{pmatrix} = 0 \tag{0.19}$$

quindi

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{3+\sqrt{5}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{3-\sqrt{5}}\end{aligned} \tag{0.20}$$

Concludendo la soluzione generale di (0.16) è

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\cos\omega_1 t + \alpha_1) + A_{12}\cos\omega_2 t + \alpha_2) + \overline{z}_1 \\ A_{21}\cos\omega_1 t + \alpha_1) + A_{21}\cos\omega_2 t + \alpha_2) + \overline{z}_2 \end{pmatrix} \tag{0.21}$$

con costanti arbitrarie α_1, α_2, mentre gli elementi di matrice $((A_{ij}))$ sono combinazioni lineari di due costanti arbitrarie A_1, A_2:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{0.22}$$

con E matrice unitaria che diagonalizza la matrice

$$\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{0.23}$$

$\square$